

Dans le cas qui nous intéresse où les ondes sont planes, la limitation du milieu par deux plans indéfinis et parallèles au front d'onde ne modifie pas le schéma idéal d'un milieu illimité. Par contre, la présence des surfaces latérales affecte généralement le mode de vibration et la vitesse de propagation. Les vibrations ne sont plus longitudinales ou transversales, et la vitesse devient dépendante de l'importance des dimensions latérales par rapport à la longueur d'onde. Autrement dit, le milieu devient géométriquement dispersif.

On sait que la recherche des solutions des équations des vibrations élastiques qui satisfont à toutes les conditions aux limites, se heurte à d'importantes difficultés mathématiques. Cependant, plusieurs solutions approchées ont été étudiées pour les corps isotropes sans perte, ayant les formes simplifiées suivantes :

- 1) Barreau cylindrique long, de longueur  $L \gg 2a$ , où  $2a$  est le diamètre.
- 2) Plaque circulaire mince, d'épaisseur  $e \ll 2a$ , où  $2a$  est le diamètre.

Dans le premier cas, on a trouvé des solutions annulant les contraintes sur la surface cylindrique. Par contre, les contraintes peuvent être quelconques sur les faces planes extrêmes au voisinage desquelles les solutions ne sont donc qu'approximatives. Dans le second cas, les contraintes sont annulées sur les faces planes de la plaque, alors qu'elles sont rendues seulement aussi faibles que possible sur la surface cylindrique.

Dans les expériences des ultrasons, la longueur d'onde est généralement petite par rapport aux dimensions latérales de l'échantillon. Nous allons examiner comment s'effectue le passage à la limite quand le rapport  $2a/\Lambda$  devient très grand, où  $2a$  est le diamètre de l'échantillon et  $\Lambda$  la longueur d'onde.

**II-C. Propagation des ondes planes suivant l'axe d'un barreau long de diamètre  $2a \gg \Lambda$ ,  $\Lambda$  étant la longueur d'onde.** — A partir de la solution de Pochhammer, on peut étudier trois modes de vibrations : quasi-longitudinal, de torsion et de flexion. Parmi ces modes, nous ne considérons que le premier qui est habituellement excité dans le domaine des ultrasons.

Pour ce mode, les solutions de l'équation séculaire [17] donnent lieu à de multiples branches de dispersion qui relient la vitesse de phase et la fréquence ou la longueur d'onde. Une seule de ces branches, étudiée en particulier par Bancroft [18], s'étend jusqu'à la région des basses fréquences ( $\Lambda \gg 2a$ ). C'est cette région qui correspond aux conditions expérimentales de la méthode de résonance. Vers les hautes fréquences ( $\Lambda \ll 2a$ ), la vitesse de phase sur cette branche tend vers celle de Rayleigh. Ce comportement paradoxal ne peut être retenu dans notre cas, car il conduirait à une énergie vibratoire concentrée au voisinage de la surface cylindrique, alors que notre champ ultrasonore intéresse surtout la région centrale de l'échantillon.

Holden [19] a étudié d'autres branches de dispersion et il trouve notamment que pour toutes ces branches, la vitesse de phase des ondes quasi longitudinales tend vers la vitesse limite du mode transversal pour  $\Lambda \ll 2a$ . Ceci laisse supposer que le mode quasi longitudinal, qui contient nécessairement une composante

transversale pour que les contraintes puissent s'annuler sur la surface cylindrique, se transforme en un mode transversal qui serait plus stable à la limite des hautes fréquences.

L'ensemble de ces résultats nous montre que le schéma du barreau long où l'on fait abstraction des conditions aux limites sur les extrémités ne peut servir à évaluer l'influence des surfaces latérales sur la vitesse limite.

**II-D. Propagation des ondes planes suivant l'épaisseur d'une plaque mince de diamètre  $2a \gg \Lambda$ ,  $\Lambda$  étant la longueur d'onde.** — Il est plus facile, dans ce cas, d'examiner les vibrations en régime permanent, c'est-à-dire les ondes stationnaires. On étudie alors les fréquences de résonance en épaisseur, ce qui permet, connaissant le rang de l'harmonique, de calculer les vitesses.

Aggarwal [20] a donné l'équation séculaire des fréquences propres dans une solution générale où les vibrations ont une symétrie de révolution autour de l'axe de la plaque. Il a notamment fait remarquer que les solutions de cette équation conduisent à des vitesses égales aux vitesses limites quand le rayon de la plaque augmente indéfiniment. Plus récemment, Zarembowitch [21] a démontré, à partir de la solution générale précédente, que les vitesses dans une plaque de rayon fini sont toujours supérieures aux vitesses limites correspondantes. D'après des mesures optiques précises de la vitesse des ondes longitudinales, cet auteur a, en outre, suggéré une règle empirique selon laquelle la vitesse limite est atteinte avec une erreur relative inférieure à  $5 \cdot 10^{-4}$  si les dimensions latérales de l'échantillon sont supérieures à  $50 \Lambda$ .

Sous la rubrique suivante, nous reprenons l'étude des vibrations symétriques de la plaque mince à partir d'une solution moins générale que celle d'Aggarwal, mais qui permet de mieux examiner le passage à la limite. Nous démontrerons, en particulier, que l'ordre de grandeur, suggéré par Zarembowitch, peut être justifié théoriquement.

**II-E. Étude des vibrations symétriques en ondes quasi longitudinales d'une plaque isotrope circulaire de diamètre  $2a \gg \Lambda$ , où  $\Lambda$  est la longueur d'onde.** — Nous cherchons une solution dans laquelle le mouvement d'un point quelconque de la plaque a seulement deux composantes  $U$  et  $W$  suivant les directions  $r$  et  $Z$  respectivement (fig. 6). Par suite de la symétrie de révolution autour de  $oZ$ ,  $U$  et  $W$  ne dépendent que des coordonnées  $r$  et  $Z$  du point considéré. Dans ce cas, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right] + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \\
 = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\
 (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right] + \mu \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] \\
 + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé de la plaque et  $\rho$  sa densité. Nous considérons en particulier les solutions

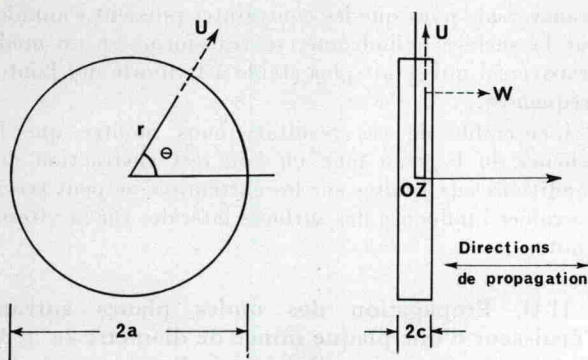


FIG. 6. — Vibrations symétriques d'une plaque circulaire.

irrotationnelles (ondes quasi-longitudinales). Les parties spatiales de  $U$  et  $W$  peuvent alors s'obtenir à partir d'une seule fonction  $\Phi(r, Z)$  :

$$U = u \exp \pi i f t \quad ; \quad W = w \exp 2\pi i f t$$

avec

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial Z} - \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

où  $f$  est la fréquence.

Les équations (6) se réduisent dans ce cas à une seule équation en  $\Phi$  :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} + \frac{4\pi^2 f^2 \rho}{(2\mu + \lambda)} \Phi = 0$$

Une des solutions possibles de cette équation peut s'écrire :

$$\Phi = A J_0(\beta r) \sin \sqrt{h^2 - \beta^2} Z$$

avec les notations suivantes :

$J_0$ , fonction de Bessel, d'ordre 0,  $\beta$  et  $A$  deux constantes réelles ; et

$$h^2 = 4\pi^2 f^2 \rho / (2\mu + \lambda) = 4\pi^2 f^2 / V_l^2$$

où

$$V_l = \sqrt{(2\mu + \lambda) / \rho}$$

est la vitesse limite des ondes longitudinales (milieu illimité).

Les déplacements  $u$  et  $w$  prennent donc les formes :

$$\left. \begin{aligned} u &= -\beta A J_1(\beta r) \sin \sqrt{h^2 - \beta^2} Z \\ w &= A J_0(\beta r) \cos \sqrt{h^2 - \beta^2} Z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

où  $J_1$  est la fonction de Bessel d'ordre 1. A partir de ces déplacements, on peut écrire les contraintes normales  $\sigma_r$  et  $\sigma_Z$  (en réalité  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{ZZ}$ ) et la contrainte tangentielle  $\tau_{rZ}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -A \left[ (\lambda h^2 + 2\mu \beta^2) J_0(\beta r) - 2\mu \beta \frac{J_1(\beta r)}{r} \right] \sin \sqrt{h^2 - \beta^2} Z \\ \sigma_Z &= -A [2\mu(h^2 - \beta^2) + \lambda h^2] J_0(\beta r) \sin \sqrt{h^2 - \beta^2} Z \\ \tau_{rZ} &= -4A\mu\beta \sqrt{h^2 - \beta^2} J_1(\beta r) \cos \sqrt{h^2 - \beta^2} Z \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

1) **Conditions aux limites.** — a) CAS où  $\beta$  PEUT ÊTRE NUL. —  $\sigma_Z$  et  $\tau_{rZ}$  doivent s'annuler sur les faces planes  $Z = \pm C$  et  $r$  quelconque, d'où les équations :

$$\begin{aligned} [2\mu(h^2 - \beta^2) + \lambda h^2] \sin \sqrt{h^2 - \beta^2} C &= 0 \\ \beta \sqrt{h^2 - \beta^2} \cos \sqrt{h^2 - \beta^2} C &= 0 \end{aligned}$$

qui sont satisfaites par les solutions  $\beta = 0$  et  $hc = n\pi$ , où  $n$  est entier  $> 0$ . Les fréquences propres de la plaque sont alors données par :

$$f = f_l = \frac{n}{2c} V_l.$$

D'autre part, il est facile de voir que ces solutions conduisent à une longueur d'onde  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \frac{2c}{n} \quad (2c, \text{ épaisseur de la plaque}).$$

Il s'ensuit que la vitesse de propagation est égale à la vitesse limite  $V_l$ . Par ailleurs, la composante  $\mu$  du déplacement s'annule partout, c'est-à-dire que l'onde devient longitudinale. Cependant, la contrainte normale  $\sigma_r$  ne s'annule sur la surface de révolution que si le rayon  $a$  augmente indéfiniment, de telle manière que le produit  $\beta a$  puisse être racine de l'équation  $J_0(\beta a) = 0$ .

b) CAS où  $\beta \neq 0$ . — On voit, d'après ce qui précède, que le passage à la limite, quand le rayon  $a$  augmente indéfiniment, peut être étudié en prenant  $\beta$  petit, ou plus précisément  $(\beta/h) \ll 1$ . Cherchons une solution proche du cas idéal précédent où  $hc$  prendra les valeurs  $hc = n\pi(1 + \Delta)$ , où  $\Delta \ll 1$ .

Ceci exprime que la nouvelle fréquence de résonance  $f$  (pour  $n$  fixé) sera reliée à la fréquence précédente  $f_l$  par :

$$\frac{f - f_l}{f_l} = \Delta.$$

Dans ces conditions,  $\sigma_Z$  et  $\tau_{rZ}$  ne peuvent plus être rigoureusement annulées sur les faces planes de la plaque. Pour se rendre compte de leur importance sur ces faces, il convient de les comparer à  $|\sigma_Z(r, Z)|_{\text{maxi}}$  qui est la contrainte normale maximale dans la direction de propagation des ondes quasi longitudinales :

$$\frac{|\tau_{rZ}(r, Z)|_{\text{maxi}}}{|\sigma_Z(r, Z)|_{\text{maxi}}} < \frac{\mu}{(2\mu + \lambda)} \frac{\beta}{h} \ll 1.$$

On voit donc que  $\tau_{rZ}$  est relativement petite dans toute la plaque. Pour rendre le rapport :

$$\frac{|\sigma_Z(r, \pm c)|_{\text{maxi}}}{|\sigma_Z(r, Z)|_{\text{maxi}}}$$

également petit, il suffit d'annuler les termes les plus importants dans le développement limité de  $\sigma_Z(r, \pm c)$  en  $\beta/h$  et  $\Delta$ .

On obtient alors la relation :

$$\Delta = \frac{c\beta}{2\pi n} \cdot \frac{\beta}{h}.$$

Mais puisque la plaque est à la même résonance que dans le premier cas, la longueur d'onde reste inchangée (1). La nouvelle vitesse  $V$  est donc reliée à la vitesse limite  $V_l$  par :

$$\frac{V - V_l}{V_l} = \frac{c\beta^2}{2\pi n h}.$$

(1) On peut le démontrer d'une façon plus rigoureuse à partir des expressions des déplacements.